Teorema de la Función Implícita

Ayudante: Jorge Bravo

Enunciado del Teorema

Teorema 0.1 (Función Implícita)**.** *Sea*

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

una función de clase $\mathscr{C}^1$. *Sea* $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *un punto tal que se cumpla que*

$$f(a, b) = 0$$

y que también se cumpla que $D_y f(a, b)$ *sea invertible (equivalente a que su determinante sea distinto de* 0*). Entonces existen vecindades* $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n$ *del punto* a *y* $\mathscr{V} \subset \mathbb{R}^m$ *del punto* b *tal que se tiene lo siguiente*

1. *Existe la siguiente función de clase* $\mathscr{C}^1$

$$\varphi : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathscr{V} \subset \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto y(x)$$

tal que se tiene que $f(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in \mathscr{U}$

2. *Se tiene la siguiente igualdad para la derivada de* φ *en el punto* a

$$D\varphi(a) = -(D_y f(a, b))^{-1} Df(a, b)$$

Problemas Resueltos

Problema 1. Muestre que el sistema

$$x^3 + uy^2 + v = 0$$
$$y^3 + yv + x^2 = 0$$

define a u y v como funciones de x e y en vecindades de los puntos $(x, y) = (0, 1)$ y $(u, v) = (1, -1)$. Sea $w = (1, 1)$, determine la derivada direccional de $v = v(x, y)$ en el punto $(0, 1)$ en la dirección de w.

Solución 1. Lo primero que queremos ver es que u y v se definen como funciones implícitas cerca del punto $(x, y, u, v) = (0, 1, 1, -1)$. Notemos que tenemos 2 ecuaciones, 2 variables "conocidas" (independientes) y 2 variables "desconocidas" (dependientes), por lo tanto nos armamos la siguiente función

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$((x, y), (u, v)) \mapsto (x^3 + uy^2 + v, y^3 + yv + x^2)$$

Darse cuenta que f es de clase $\mathscr{C}^{-1}$ por álgebra de funciones $\mathscr{C}^1$. Notemos además que $f((0, 1), (1, -1)) = (0, 0)$ y veamos cuales derivadas tenemos que calcular para aplicar el teorema de la función implícita.

$$Df((0,1),(1,-1))_{2\times 4} = \left[\begin{array}{cc|cc} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_u f_1 & \partial_v f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 & \partial_u f_2 & \partial_v f_2 \end{array}\right]_{((x,y),(u,v))=((0,1),(1-1))}$$

Como despues nos piden obtener la derivada direccional de $v(x, y)$ necesitaremos todas las derivadas asi que calculemos todas de al tiro.

$$Df((0,1),(1,-1))_{2\times 4} = \left[\begin{array}{cc|cc} 3x^2 & 2uy & y^2 & 1 \\ 2x & 3y^2 + v & 0 & y \end{array}\right]_{((x,y),(u,v))=((0,1),(1-1))} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{1}$$

Recordemos que siempre, si dejamos las variables que no conocemos a la derecha, la matriz de la derecha sera $D_{(u,v)} f((0, 1), (1, -1))$, cuando le calculamos el determinante a esa matriz, es decir a $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, nos da 1 y por tanto es invertible.

Por lo tanto, por el teorema de la función implícita, existen vecindades $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$ de $(0,1)$ y $\mathscr{V} \subset \mathbb{R}^2$ de $(1,-1)$ y la siguiente función

$$\varphi : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathscr{V} \subset \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$$

La cual cumple que

$$f((x,y),(\varphi(x,y)) = 0, \forall (x,y) \in \mathscr{U}$$

Es decir que φ define de manera implícita a u y v en función de x e y.
Tambien sabemos que la derivada de φ en el punto $(0,1)$ viene dada por

$$\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix}_{(x,y)=(0,1)} = D\varphi(0,1) = -(D_{(u,v)} f((0,1),(1,-1)))^{-1} D_{(x,y)} f((0,1),(1,-1)) \tag{2}$$

Ahora queremos calcular la derivada direccional de $v(x,y)$ en el punto $(0,1)$ en la dirección de w. Para esto recordemos que la derivada direccional de una función diferenciables viene dada por

$$\frac{\partial v}{\partial w}(0,1) = \nabla v(0,1) \cdot \frac{w}{||w||} = \begin{bmatrix} \partial_x v(0,1) & \partial_y v(0,1) \end{bmatrix} \cdot \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_x v(0,1) + \partial_y v(0,1)) \tag{3}$$

Por lo tanto solo nos falta conocer $\partial_x v(0,1)$ y $\partial_y v(0,1)$, pero estos los podemos obtener desde la derivada de φ desde la ecuación (2). Pero esas matrices ya las calculamos antes en la ecuación (1), por lo que solo tenemos que multiplicar y ver que nos da

$$D\varphi(0,1) = -(D_{(u,v)} f((0,1),(1,-1)))^{-1} D_{(x,y)} f((0,1),(1,-1)) = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto recordamos de (2) que

$$\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix}_{(x,y)=(0,1)} = D\varphi(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $\partial_x v(0,1) = 0$ y $\partial_y v(0,1) = 2$
Reemplazando en (3) entonces obtenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial w}(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0+2) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Problema 2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$xu^2 + 2y^2v^2 + uvz = 1$$
$$vx^2 - y^2 + uv^2 = 0$$

Muestre que el sistema define funciones implícitas $u = u(x,y,z)$ y $v = (x,y,z)$, en una vecindad del punto $(0,-1,1,1,-1)$. Justifique

Solución 2. Sabemos que cuando queremos ver que un sistema define de manera implícita a ciertas variables en funciones de otras, lo mejor que podemos hacer es usar el teorema de la función implícita. Notemos que "conocemos" 3 variables (x,y,z) y "desconocemos" a 2, (u,v). Por lo tanto definimos la siguiente función

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$((x,y,z),(u,v)) \mapsto (xu^2 + 2y^2v^2 + uvz - 1, vx^2 - y^2 + uv^2)$$

Notemos que esta función es de clase $\mathscr{C}^1$ pues es un polinomio en 5 variables (otra opción es argumentar por álgebra de funciones $\mathscr{C}^1$).
Luego evaluamos en el punto para ver que se satisface que $f((0,-1,1),(1,-1)) = (0,0)$

$$f((0,-1,1),(1,-1)) = (0+2-1-1, -1+1) = (0,0)$$

Por lo tanto nos falta verificar que la derivada con respecto a las variables que no conocemos tiene determinante distinto de 0, recordemos quien es esta derivada en el punto $((0,-1,1),(1,-1))$

$$Df((0,-1,1),(1,-1)_{2\times 5} = \left[\begin{array}{ccc|cc} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_z f_1 & \partial_u f_1 & \partial_v f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 & \partial_z f_2 & \partial_u f_2 & \partial_v f_2 \end{array}\right]_{((x,y,z),(u,v))=((0,-1,1),(1-1))}$$

Recordemos que la derivada que nos interesa es la matriz que queda a la derecha (siempre que seamos ordenados y definamos a f de la manera correcta), la cual llamamos $D_{(u,v)}f$, dado que no necesitaremos las derivadas de $u(x,y,z)$ ni $v(x,y,z)$ no es necesario calcular las derivadas de la izquierda, por lo que solo calcularemos la que nos interesa.

$$\begin{aligned}
D_{(u,v)}f((0,-1,1),(1-1)) &= \begin{bmatrix} \partial_u f_1 & \partial_v f_1 \\ \partial_u f_2 & \partial_v f_2 \end{bmatrix}_{((x,y,z),(u,v))=((0,-1,1),(1-1))} \\
&= \begin{bmatrix} 2xu+vz & 4y^2v+uz \\ v^2 & x^2+2uv \end{bmatrix}_{((x,y,z),(u,v))=((0,-1,1),(1-1))} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Luego queremos saber si esta matriz es invertible, para poder aplicar el teorema de la función implícita, por lo que calcularemos su determinante para ver que es distinto de 0.

$$\det \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 2+3 = 5$$

Por lo tanto es invertible. Por el teorema de la Función Implícita existen vecindades $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^3$ de $(0,-1,1)$ y $\mathscr{V} \subset \mathbb{R}^2$ de $(1,-1)$ de tal forma que existe la función

$$\begin{gathered}
\varphi : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathscr{V} \subset \mathbb{R}^2 \\
(x,y,z) \mapsto (u(x,y,z), v(x,y,z))
\end{gathered}$$

que cumple que $f((x,y,z),\varphi(x,y,z)) = 0, \forall (x,y,z) \in \mathscr{U}$, en otras palabras, f define a u y v de manera implícita en función de x, y, z.