Introduccion EDO

Ayudante: Jorge Bravo

EDO separable

Una EDO separable es una ecuación diferencial ordinaria de grado 1 que se puede escribir de la siguiente forma

$$y' = f(x)g(y)$$

con f, g funciones continuas. Notemos que la función f **no** puede depender de y, análogamente g no puede depender de x. Es decir nos queda algo que solo depende de x multiplicado por algo que solo depende de y.

Ejemplo 1. La ecuación diferencial dada por

$$y' = 6y^2x$$

Es separable, pues la podemos escribir como

$$y' = (6y^2)(x)$$

Ejemplo 2. La EDO dada por

$$y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$$

Es separable pues la podemos escribir de la forma

$$y' = (\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})(y^3)$$

Ejemplo 3. La EDO dada por

$$y' = e^{x-y}$$

Es separable pues la podemos escribir como

$$y' = e^{x-y} = e^x e^{-y}$$

Para resolver una EDO separable haremos un truco, el cual se puede justificar de manera formal pero no va al caso ver porque. El truco es el siguiente.

1. Escribir la ecuación diferencial en su forma separada, es decir dejarla de la forma

$$y' = f(x)g(y)$$

2. Cambiar la notación y' por $\frac{dy}{dx}$, es decir escribir la EDO de la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

3. Dejar todo lo que tenga y a un lado y todo lo que tenga x al otro, para esto es necesario multiplicar por dx, lo hacemos de manera totalmente formal

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

4. Integrar ambos lados con respecto a su diferencial

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

5. Una vez se integro ambos lados, despejar y.

Ejemplo 4. Resolvamos la siguiente EDO

$$y' = 6y^2x$$

Esta ya esta escrita en su forma separada, por lo que cambiamos la notación a la de Leibniz

$$\frac{dy}{dx} = 6y^2x$$

Dejamos todo lo que tenga y a un lado y todo lo que tenga x al otro

$$\frac{1}{6y^2}dy = xdx$$

Integramos con respecto a cada variable

$$-\frac{1}{6y} = \int \frac{1}{6y^2}dy = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

Luego obtenemos

$$-\frac{1}{6y} = \frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$$

Por ultimo despejamos y

$$-\frac{1}{6y} = \frac{x^2}{2} + C \iff -\frac{1}{6} = (\frac{x^2}{2} + C)y \iff y = -\frac{1}{6(\frac{x^2}{2} + C)}$$

Reordenando al final obtenemos que

$$y = -\frac{2}{6x^2 + 12C} \implies -\frac{1}{3x^2 + 6C}$$

Pero como C es arbitraria, $6C$ también lo es y podemos dejarlo como C nada mas. Es decir la solución general es

$$y = -\frac{1}{3x^2 + C}$$

Problemas

Problema 1. Resuelva la siguiente EDO

$$y' = 2xy + 3y - 4x - 6$$

Solución 1. Intentaremos factorizar la expresión a la derecha, pues queremos dejarla como una EDO separable.

$$y' = 2xy + 3y - 4x - 6 = (2x + 3)y - 4x - 6 = (2x + 3)y - 2(2x + 3) = (2x + 3)(y - 2)$$

Luego la forma separada de la EDO es

$$y' = (2x + 3)(y - 2)$$

Esto pues y' es igual a una multiplicacion de 2 factores, donde uno depende solo de x y el otro solo de y. Aplicamos el metodo para EDO's separables, entonces reescribimos la ecuación con la otra notación

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 3)(y - 2)$$

Ahora dejamos todo lo que tenga y al lado izquierdo y todo lo que tenga x al lado derecho, multiplicamos por dx sin problemas.

$$\frac{1}{y - 2}dy = (2x + 3)dx$$

Ahora integramos

$$\int \frac{1}{y - 2}dy = \int (2x + 3)dx$$

Resolvamos primero la integral de la derecha, entonces por linealidad tenemos que

$$\int (2x + 3)dx = \int 2xdx + \int 3dx = x^2 + 3x + C$$

Ahora resolvamos la integral de la izquierda, los haremos usando el cambio de variable $u = y - 2$, luego tenemos que $du = dy$ entonces

$$\int \frac{1}{y - 2}dy = \int \frac{1}{u}du = \ln(|u|) = \ln(|y - 2|)$$

Ahora tenemos que despejar y desde la igualdad, notemos que

$$\ln(|y-2|) = x^2 + 3x + C \iff |y-2| = e^{x^2+3x+C} \iff |y-2| = e^C e^{x^2+3x}$$

Como C es arbitrario, tenemos que e^C tambien es arbitrario, por lo que lo cambiamos por una constante

$$|y-2| = Ce^{x^2+3x}$$

Ahora el signo del valor absoluto lo puede absorber la constante, por lo que tenemos que

$$y - 2 = Ce^{x^2+3x} \iff y = 2 + Ce^{x^2+3x}$$

Por lo tanto la solución general de la EDO viene dada por

$$y(x) = 2 + Ce^{x^2+3x}$$

Problema 2. Resuelva el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y^2}$$
$$y(0) = 3$$

Solución 2. Primero resolvamos la EDO, notemos que ya esta escrita en la notacion de Leibniz y que ya esta en su forma separada, dejamos todo lo que tenga y a la izquierda y todo lo que tenga x a la derecha.

$$y^2 dy = x^3 dx$$

Ahora integramos

$$\int y^2 dy = \frac{y^3}{3}$$
$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

Ahora despejamos y desde la igualdad.

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^4 + 4C}{4} \iff y^3 = \frac{3x^4 + 12C}{4} \iff y = \sqrt[3]{\frac{3x^4 + 12C}{4}}$$

De nuevo, dado que C es arbitrario, $12C$ tambien lo es y por tanto podemos reemplazar $12C$ por C. Por lo tanto la solucion a la EDO es

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^4 + C}{4}}$$

Ahora usamos la condicion inicial para despejar la constante, por lo tanto

$$3 = y(0) = \sqrt[3]{\frac{C}{4}} \iff 27 = \frac{C}{4} \iff C = 108$$

Por lo tanto la solucion al PVI viene dada por

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{3x^4 + 108}{4}}$$