EDO Exacta

Ayudante: Jorge Bravo

Estructura y Forma de una Ecuacion diferencial exacta

La estructura de una EDO exacta es la siguiente, tiene 2 formas

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

La ecuacion diferencial se dira exacta si se cumple que

$$N_x(x,y) - M_y(x,y) = 0$$

Por cosas de matematicas muy avanzandas (fuera del curso) si la EDO es exacta, entonces se cumple que existe una funcion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de tal forma que

$$\Phi_x = M(x,y) \wedge \Phi_y = N(x,y)$$

de tal forma que las curvas de nivel de Φ seran soluciones a la ecuacion diferencial.

Observación 0.1. Es importante que esten igualadas a 0 y el signo entre ellas sea $+$, en caso de no ser $+$ se considera el simbolo dentro de M u N dependiendo del caso.

Como solucionar un EDO exacta

Lo haremos con un ejemplo pues es la forma más sencilla de explicar

Ejemplo 1. Considere la Siguiente EDO y resuelvala

$$(2xy - 9x^2)dx + (2y + x^2 + 1)dy = 0$$

1. El primer paso sera verificar que la EDO es exacta. Notemos que ya tiene la estructura de una EDO exacta, falta verificar que es exacta. Notemos que

$$M(x,y) = 2xy - 9x^2$$
$$N(x,y) = 2y + x^2 + 1$$

Para verificar que es exacta tenemos que vericar que

$$N_x(x,y) - M_y(x,y) = 0$$

Entonces calculemos

$$N_x(x,y) = 2x$$
$$M_y(x,y) = 2x$$

Luego $N_x(x,y) - M_y(x,y) = 0$. Por lo tanto la EDO es exacta.

2. Ahora tenemos que encontrar la Φ, sabemos que $\Phi_x = M(x,y)$, por lo tanto si integramos con respecto a x obtenemos Φ.

$$\Phi(x,y) = \int M(x,y)dx = \int 2xy - 9x^2 dx = x^2y - 3x^3 + C(y)$$

Dado que $\Phi_y(x,y) = N(x,y)$ igualamos

$$x^2 + C'(y) = \Phi_y(x,y) = N(x,y) = 2y + x^2 + 1$$

De lo que se desprende que

$$x^2 + C'(y) = 2y + x^2 + 1 \iff C'(y) = 2y + 1$$

Integramos con respecto a y para obtener $C(y)$

$$C(y) = \int 2y + 1dy = y^2 + y + C$$

Por lo tanto la funcion Φ que buscabamos es

$$\Phi(x,y) = x^2y - 3x^3 + y^2 + y + C$$

3. Luego la solucion implicita a la EDO viene dada por

$$x^2y - 3x^3 + y^2 + y + C = \Phi(x, y) = 0$$

Es decir

$$x^2y - 3x^3 + y^2 + y = C$$

Ahora el paso a paso

1. Lo primero que hacemos es dejar la EDO en su forma canonica, es decir al dejamos de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

2. Verificamos que la EDO es exacta, es decir vemos que se cumple

$$N_x(x, y) - M_y(x, y) = 0$$

3. Vemos que es mas facil integrar, si $M(x, y)$ con respecto a x ó $N(x, y)$ con respecto a y. Seleccionamos uno de estos, en este caso usaremos $M(x, y)$ como ejemplo

4. Planteamos la existencia de una funcion $\Phi(x, y)$ de tal forma que

$$\Phi(x, y)_x = M(x, y) \tag{3}$$
$$\Phi(x, y)_y = N(x, y) \tag{4}$$

Al integrar con respecto a lo que escogimos obtenemos

$$\Phi(x, y) = \int M(x, y)dx + C(y) \tag{5}$$

Llamemos $S(x, y) = \int M(x, y)dx$

5. Derivamos el Φ que tenemos con respecto a la otra variable, en nuestro caso y, e igualamos con las ecuaciones (3) u (4), es decir nos que

$$S_y(x, y) + C'(y) = \Phi_y(x, y) = N(x, y)$$

6. Despejamos $C'(y)$

$$C'(y) = N(x, y) - S_y(x, y)$$

7. Integramos con respecto a la variable de la cual depende C, en nuestro aso y. De donde obtenemos

$$C(y) = \int N(x, y) - S_y(x, y)dy$$

8. Reemplazamos en (5) y obtenemos

$$\Phi(x, y) = S(x, y) + \int N(x, y) - S_y(x, y)dy$$

9. La solución a la EDO viene dada por

$$\Phi(x, y) = C$$

EDOs Exactas con factor integrante

Puede darse el caso donde tengamos una ecuacion diferencial de la forma (1) ó (2) pero que esta no sea exacta, es decir que

$$N_x - M_y \neq 0$$

Hay veces en las que si se multiplica la EDO por un factor integrante $\eta(x, y)$ esta se vuelva exacta, al multiplicar por esta funcion la siguiente EDO es exacta

$$\eta(x, y)M(x, y)dx + \eta(x, y)N(x, y)dy = 0$$

Encontrar este η normalmente es muy complicado, por lo que nos dan una forma que tiene que tener y con la condicion

$$\partial_x(\eta(x, y)N(x, y)) - \partial_y(\eta(x, y)M(x, y)) = 0$$

Ejemplo 2. La ecuación
$$(x - \frac{y^2}{x})dx + 2ydy = 0$$
tiene un factor integrante (que la convierte en exacta) de la forma $f(x^2 + y^2)$. Hallarlo

1. Multiplicamos por el factor integrante y escribimos la ecuacion de exactitud.

$$(f(x^2 + y^2)x - f(x^2 + y^2)\frac{y^2}{x})dx + f(x^2 + y^2)2ydy = 0$$

Ahora tenemos que

$$M(x, y) = (f(x^2 + y^2)x - f(x^2 + y^2)\frac{y^2}{x})$$
$$N(x, y) = f(x^2 + y^2)2y$$

Por exactitud tenemos que
$$N_x - M_y = 0$$

Calculamos las derivadas

$$M_y(x, y) = 2xyf'(x^2 + y^2) - (2\frac{y^3}{x}f'(x^2 + y^2) + f(x^2 + y^2)\frac{2y}{x})$$

Ademas
$$N_x = 4xyf'(x^2 + y^2)$$

Ocupamos la ecuacion de exactitud

$$\begin{aligned}
2xyf'(x^2 + y^2) + 2y(\frac{y^2 f'(x^2 + y^2) + f(x^2 + y^2)}{x}) &= 0 \\
2x^2yf'(x^2 + y^2) + 2y(y^2 f'(x^2 + y^2) + f(x^2 + y^2)) &= 0 \\
x^2 f'(x^2 + y^2) + (y^2 f'(x^2 + y^2) + f(x^2 + y^2)) &= 0 \\
(x^2 + y^2)f'(x^2 + y^2) &= -f(x^2 + y^2) \\
\frac{f'(x^2 + y^2)}{f(x^2 + y^2)} &= -\frac{1}{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $u = x^2 + y^2$, luego

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = -\frac{1}{u} \iff (\ln(f(u)))' = -\frac{1}{u}$$

Integramos con respecto a u, luego

$$\ln(f(u)) = -\ln(u) \iff \ln(f(x^2 + y^2)) = -\ln(x^2 + y^2)$$

Aplicamos la exponencial
$$f(x^2 + y^2) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Problemas

Problema 1. Considere la ecuacion
$$2xydx + (x^2 + \cos(y))dy =$$
Verifique que es exacta, encuentre la solucion general y encuentre la solucion que pasa por el punto $(1, \pi)$