Ayudantias al papel II - MAT023

Autor: Jorge Bravo

Problema 1

Sea U un espacio vectorial real de dimensión 3 y $\mathscr{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base para este espacio. Considere una transformación lineal $T : U \to U$ de tal forma que cumpla

1. $T^2 = T$
2. $T(u_2) = u_3$
3. $u_1 \in \ker T$

Si $\mathscr{D} = \{u_1 - 3u_2 + u_3, 2u_2 - u_3, -2u_3\}$ **es** una base de U, calcule $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{D}}$

Analisis y solucion del problema 1

Lo primero que tenemos que darnos cuenta es que nos estan preguntando cual es la representacion matricial de T desde la base $\mathscr{B}$ a la base $\mathscr{D}$, si recordamos de clase, esta es por definicion

$$[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{D}} = \begin{bmatrix} [Tu_1]_{\mathscr{D}} & [Tu_2]_{\mathscr{D}} & [Tu_3]_{\mathscr{D}} \end{bmatrix}$$

Donde $[Tu_k]_{\mathscr{D}}$ son las coordenadas de $T(u_k)$ en la base $\mathscr{D}$. Recordemos que las coordenadas de un vector v en una base $\mathscr{P}$ son los coeficientes que acompanan a la base $\mathscr{P}$ cuando escribimos a v como combinacion lineal de los vectores en $\mathscr{P}$, esto esta bien definido pues al ser $\mathscr{P}$ una base, se tiene que a cualquier vector lo podemos escribir como combinacion lineal de vectores en esta de manera **unica**.

Tambien recordemos que una transformacion lineal viene totalmente **determinada** por los valores que toma en una base. Por lo tanto nos interesa conocer $T(u_k)$ para $k \in \{1, 2, 3\}$. Analisemos esto.

Por la condición 3, sabemos que $u_1 \in \ker T$, pero esto es lo mismo que decir que $Tu_1 = 0$, además de esto podemos decir algo mas de la trasnformacion T, esta no es inyectiva, pues u_1 al ser parte de la base es distinto de 0 y por tanto el kernel es no trivial.

Por la condicion 2 sabemos que $Tu_2 = u_3$, ademas usando la condicion 1 y aplicandola a la ecuacion anterior obtenemos que

$$u_3 = Tu_2 = T^2u_2 = Tu_3$$

Por lo tanto, dado que ya sabemos donde envia T la base $\mathscr{C}$, conocemos a T. Ahora con todo esto sabemos que la representacion matricial T con respecto a las bases vendra dada por

$$[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{D}} = \begin{bmatrix} [Tu_1]_{\mathscr{D}} & [Tu_2]_{\mathscr{D}} & [Tu_3]_{\mathscr{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0]_{\mathscr{D}} & [u_3]_{\mathscr{D}} & [u_3]_{\mathscr{D}} \end{bmatrix}$$

Pero sabemos que las coordenadas del 0 en cualquier base siempre sera la columna 0. Por lo tanto nos basta calcular las coordenadas de u_3 en la base $\mathscr{D}$. Hagamos esto.

Por lo hablado al principio queremos encontrar los coeficiente $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, de tal forma que

$$u_3 = \alpha(u_1 - 3u_2 + u_3) + \beta(2u_2 - u_3) - \gamma 2u_3$$

Juntando terminos similares obtenemos que

$$u_3 = \alpha u_1 + (-2\alpha + 2\beta)u_2 + (\alpha - \beta - 2\gamma)u_3 \iff 0 = \alpha u_1 + (-2\alpha + 2\beta)u_2 + (\alpha - \beta - 2\gamma - 1)u_3$$

Donde lo que hicimos para pasar de la parte izquierda a la derecha fue restar u_3 y factorizar los escalares. Dado que u_1, u_2, u_3 son L.I., pues forman una base, se tiene que la unica forma de escribir al 0 es la trivial, es decir obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ 2\beta - 2\alpha &= 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma - 1 &= 0 \end{aligned}$$

de las primeras 2 ecuaciones se desprende rapidamente que $\alpha = 0 = \beta$ y reemplazando en la ultima obtenemos $\gamma = -\frac{1}{2}$
Por lo tanto las coordenadas de u_3 en la base $\mathscr{D}$ son

$$[u_3]_{\mathscr{D}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por lo que ya tenemos todos los ingredientes necesarios para la representacion matricial de T la cual vendria siendo

$$[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{D}} = \begin{bmatrix} [0]_{\mathscr{D}} & [u_3]_{\mathscr{D}} & [u_3]_{\mathscr{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Interludio

Me imagino que muchos de ustedes estarán un poco nerviosos por el control que tienen que dar en aproximadamente 15 minutos, y no les importara tanto un ejercicio de funciones en varias variables, pues no es materia para el control. Por esto me desviare de la pauta oficial y haré otro ejercicio de transformaciones lineales.

Problema 2

Sea $\mathscr{B} = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida en l base $\mathscr{B}$ como $T(1,1,1) = (1,0), T(1,0,1) = (1,1), T(1,0,0) = (2,3)$. Calcule lo siguiente

1. Calcule la representación matricial de T desde la base $\mathscr{B}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^2$
2. Calcule $\ker T$
3. Calcule $\operatorname{Im} T$
4. Calcule $T(x,y,z)$ para todo vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Analisis y Solucion problema 2

Haremos lo mismo que hicimos en el ejercicio 1 para encontrar la representación matricial de T desde $\mathscr{B}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Es decir queremos

$$[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} [T(1,1,1)]_{\mathscr{C}} & [T(1,0,1)]_{\mathscr{C}} & [T(1,0,0)]_{\mathscr{C}} \end{bmatrix}$$

Pero si nos damos cuenta, ya no conocemos las coordenadas de cada una de esas imagenes en la base canonica de $\mathbb{R}^2$, pues nos lo da el enunciado, luego tenemos que

$$[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} [(1,0)]_{\mathscr{C}} & [(1,1)]_{\mathscr{C}} & [(2,3)]_{\mathscr{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Con esto completamos el apartado 1.
Con esta matriz podemos calcular el kernel, para eso multiplicaremos por un vector de coordenadas en $\mathscr{B}$ arbitrario y resolveremos un sistema de ecuaciones.

$$v \in \ker T \iff Tv = 0 \iff [T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}[v]_{\mathscr{B}} = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + y + 2z = 0$$
$$y + 3z = 0$$

de la ecuacion de abajo obtenemos que

$$y = -3z$$

y reemplazando en la de arriba obtenemos

$$x = z$$

Dado que tenemos 2 ecuaciones independientes, tenemos una variable libre. Luego tenemos que el Kernel viene generado por

$$\ker T = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} \rangle = \langle (1,1,1) - 3(1,0,1) + (1,0,0) \rangle = \langle (-1,1,-2) \rangle$$

Ademas tenemos que $\dim \ker T = 1$.
Por el teorema de la dimension tenemos que $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$, despejando $\dim \operatorname{Im} T$, obtenemos que $\dim \operatorname{Im} T = 2$, pero dado que el espacio de llegada tiene dimension 2 y nuestra imagen tiene dimension 2, obligatoriamente $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$, pues al contener $\operatorname{Im} T$ 2 vectores L.I. en un espacio de dimension 2, estos han de generar todo el espacio.
Para la ultima parte tenemos que obtener las coordenadas de un vector cualquiera en la base $\mathscr{B}$. Es decir queremos resolver la siguiente ecuacion.

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,0,0)$$

donde las incognitas son α, β, γ.
esto se transforma en el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta + \gamma \\ y &= \alpha \\ z &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

De donde obtenemos que $\alpha = y, \beta = z - y, \gamma = x - z$.
Luego tenemos que para $v = (x,y,z)$

$$[Tv]_{\mathscr{C}} = [T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}[v]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z-y \\ x-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - z \\ 3x - y - 2z \end{bmatrix}_{\mathscr{C}} = (2x - z, 3x - y - 2z)$$

Por lo tanto tenemos que $T(x,y,z) = (2x - z, 3x - y - 2z)$.

Epilogo

Espero les haya ido bien en el control, y en caso de que no les haya ido bien, recordar que fallar en un control no es el fin del mundo, pues su influencia en la nota total del curso es casi nula. Les puede servir de aviso de que están estudiando mal o no les esta sirviendo su método de estudio actual, por lo tanto intenten reforzarlo en este caso.