Ayudantias al papel I - MAT023

Autor: Jorge Bravo

Introducción a la serie "Ayudantias al papel"

El presente documento tiene por finalidad ser un reemplazo, aunque no perfecto, de la ayudantía de la clase MAT-023. La idea es preparar la ayudantía escribiendo este documento para después enviárselos y que quede, aunque sea una gota, de la esencia de la ayudantía.

Introducción al algebra lineal

Muchos de los problemas que ustedes se enfrentaran en su trabajo como ingenieros tendrán que ver con sistemas (sean estos edificios, circuitos y un largo etcetera) en los cuales su comportamiento **no** es lineal. Entonces la pregunta que nos hacemos es ¿Porque estudiar álgebra lineal si esta solo puede modelar problemas lineales? la respuesta a este problema es la que busca responder el curso. Veremos más adelante que podemos aproximar nuestros problemas no lineales por problemas lineales los cuales si podremos resolver con el uso del álgebra lineal, es por eso que ahora nos embarcamos en la misión de entender esta disciplina tan antigua.

Problema 1

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Considere $T : \mathscr{M}_{3\times 2} \to \mathscr{M}_{2\times 2}$ tal que $T(X) = AX$

1. Pruebe que T es una transformación lineal
2. Encuentre $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$
3. Concluya que T es inyectiva pero no epiyectiva

Analisis del problema 1

Lo primero que deberiamos hacer al ver un problema es preguntarnos si todo esta bien definido para saber que lo que nos preguntan tiene sentido.
Nos dicen que T va desde las matrices 3×2 a las matrices 2×2, ¿Sera cierto que al multiplicar A con una matriz X de dimensiones 3×2 nos da una matriz 2×2?. Si esto es cierto pues A es una matriz 2×3 y al multiplicarla por una matriz 3×2 obtenemos una matriz 2×2, por lo tanto T como función esta bien definida.
Después nos piden mostrar que T es una transformación lineal, pero por definición de transformación lineal esta es una función entre **Espacios vectoriales** que cumple ciertas reglas, hemos de verificar que el dominio y el codominio de T sean Espacios vectoriales, esto es cierto pues los espacios de matrices son Espacios vectoriales.
En la segunda pregunta nos piden determinar $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$, ¿Porque nos preguntan sobre estos objetos?, ¿Que información nos entregan ellos de T?, esta pregunta tiene una respuesta relativamente sencilla pero a la vez complicada
Saber $\ker T$ nos permite conocer cuales vectores la transformación no ve, para explicarme mejor imaginemos la siguiente transformación lineal

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 (x, y) \mapsto (x - y, x - y)$$

me podrán creer que $\ker S = \langle (1, 1) \rangle$, ahora
si tenemos 2 vectores, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ de tal forma que $v_1 = v_2 + w$, donde $w \in \ker S$ entonces tenemos que para S estos vectores son los mismos pues

$$S(v_1) = S(v_2 + w) = S(v_2) + S(w) = S(v_2)$$

Por lo tanto sabemos que S solo ve "rectas".
Ahora conocer la imagen también puede ser muy importante, imagínese que usted tiene un sistema que viene modelado por la función S, imagínese que x corresponde al tiempo que se desea invertir un dinero e y corresponde al dinero invertido. $S(x, y)$ nos dara las posibles perdidas en la primera coordenada y en la segunda coordenada las posibles ganancias. Nos gustaria saber si es posible hacer una inversion totalmente segura, esto es que exista algun (x, y) tal que $T(x, y) = (0, z), z \in \mathbb{R}$, para saber si esto es posible necesitamos ver la imagen.

Solución al problema 1

1. Verifiquemos que T es lineal, para eso consideremos $X, Y \in \mathscr{M}_{3\times 2}$ y $s \in \mathbb{R}$, queremos verificar que

$$T(X + sY) = T(X) + sT(Y)$$

verifiquemoslo

$$T(X + sY) = A(X + sY) = AX + A(sY) = AX + s(AY) = T(X) + sT(Y)$$

por lo tanto T es lineal.

2. Encontremos $\ker T$, para esto tenemos que ver cuales son los elementos de $X \in \mathscr{M}_{3\times 2}$ tales que $TX = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sea $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$, luego queremos resolver

$$\begin{aligned} TX = 0 &\iff AX = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} a + c - e & b + d - f \\ -a + e & -b + f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto queremos resolver el sistema

$$a + c - e = 0 \tag{1}$$
$$-a + e = 0 \tag{2}$$
$$b + d - f = 0 \tag{3}$$
$$-b + f == 0 \tag{4}$$

de (2) obtenemos $a = e$, reemplazando en (1) tenemos $c = 0$, ocupando (4) obtenemos $b = f$ y de (3) obtenemos $d = 0$. Dado que tenemos 2 variables libres las seleccionaremos para que sean $a, b \in \mathbb{R}$, reemplzando en la matriz tenemos

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que $\ker T = \langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rangle$, dado que estas 2 matrices son l.i. tenemos que$\dim \ker T = 2$, dado que $\dim \mathscr{M}_{3\times 2} = 6$ tenemos por el teorema de la dimension $\dim ImT = \dim \mathscr{M}_{3\times 2} - \dim \ker T = 4$. Dado que el codominio es de dimension 4 tenemos que que Im $T = \mathscr{M}_{2\times 2}$

3. En el anterior apartado demostramos que Im $T = \mathscr{M}_{2\times 2}$ por lo tanto es epiyectiva, la transformación lineal no es inyectiva pues $\ker T \neq \{0\}$.

Problema 2

Sea $T : V \to W$ una funcion lineal y biyectiva, mostrar que $T^{-1} : W \to V$ es lineal.

Analisis del problema 2

La verdad mucho análisis de este problema no se puede hacer pues es mas un problema de la teoría del algebra lineal, pues a uno le gustaría que las inversas también fueran lineales para que todo funcione bien, así que vamos a verificarlo sin darle muchas vueltas.

Solucion problema 2

Queremos verificar que dados 2 vectores $w_1, w_2 \in W$ y algun numero real s se tiene que

$$T^{-1}(w_1 + sw_2) = T^{-1}(w_1) + sT^{-1}(w_2)$$

dado que T es sobreyectiva existen $v_1, v_2 \in V$ tal que $T(v_1) = w_1$ y $T(v_2) = w_2$, luego tenemos que

$$\begin{aligned} T^{-1}(w_1 + sw_2) &= T^{-1}(T(v_1) + sT(v_2)) \\ &= T^{-1}(T(v_1 + sv_2)) \\ &= v_1 + sv_2 \\ &= T^{-1}(w_1) + sT^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

Con lo que se tiene lo pedido.

Problema 3

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ una transformacion lineal, tal que

$$\begin{aligned} T(1-x) &= (1,1,-1) \\ T(x+1) &= (0,2,-3) \\ T(x^2+x+1) &= (1,-1,1) \end{aligned}$$

Considere $H = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p'(1) = 0\}$
encuentre explicitamente $T(H)$.

Analisis problema 3

Nos dan una transformación lineal T definida sobre 3 vectores en un espacio de dimensión 3, para que esta este bien definida necesitamos que los vectores sean una base del espacio. Eso primero, luego nos piden encontrar la imagen de H a través de T, para esto necesitamos una base del subespacio H, pues este es un subespacio, para encontrar generadores de su imagen, esa es la idea del ejercicio.

Solucion al problema 3

Como se dijo anteriormente $(1-x), (x+1), (x^2+x+1)$ es una base para $\mathbb{R}_2[x]$, por lo tanto podemos expandir a T a todo el espacio mediante la condición de linealidad.
Veamos quien es en verdad H, para esto tenemos que

$$\begin{aligned} (a + bx + cx^2) \in H &\iff b + 2c = 0 \\ &\iff b = -2c \end{aligned}$$

Luego tenemos 2 variables libres, es decir $H = \langle 1, x^2 - 2x \rangle$, luego tenemos que $T(H) = \langle T(1), T(x^2 - 2x) \rangle$
Calculemos la imagen de T sobre la base de H, notar que $1 = \frac{1}{2}((1-x) + (1+x))$ entonces

$$T(1) = \frac{1}{2}(T(1-x) + T(1+x)) = \frac{1}{2}((1,1,-1) + (0,2,-3)) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -2)$$

Notar tambien que $x^2 - 2x = (1-x) - 2(x+1) + (x^2+x+1)$ (estos coeficientes se pueden encontrar resolviendo un sistema de ecuaciones)
Luego tenemos que

$$T(x^2 - 2x) = T(1-x) - 2T(x+1) + T(x^2+x+1) = (2, -4, 6)$$

es decir tenemos que

$$T(H) = \langle (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -2), (2, -4, 6) \rangle$$

Problema 4

Considere los planos

$$H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$$
$$H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 2z = 0\}$$

Encuentre una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(H_1) = H_2$ y exista un plano H_3 tal que $T(v) = v, \forall v \in H_3$

Analisis del problema 4

Este problema es en esencia geométrico, necesitamos transformar de manera lineal el plano H_1 hacia el plano H_2, para esto lo que haremos sera enviar alguna base de H_1 a H_2.
Notemos que si los planos se intersectan en una recta, podemos dejar el vector director de la recta fijo y enviamos algún vector de H_1 que sea l.i. a este a algún vector de H_2 que sea l.i. al vector director, como estamos transformando 2 vectores l.i. nos falta uno para completar la base, este lo enviamos a si mismo y tenemos un candidato a transformación que podría servir. como tenemos que el vector director quedo fijo, llamémosle d y tenemos un vector extra de la base digamos v_3 entonces el plano $\langle d, v_3 \rangle$ se quedara igual tras la transformacion. Verifiquemos que todo esto pasa.

Solucion problema 4

Calculemos la intersección de H_1 con H_2

$$(x, y, z) \in H_1 \cap H_2 \iff x + y - z = 0 \land x - 2y + 2z = 0$$

Luego restando ambas ecuaciones tenemos que

$$3y - 3z = 0 \iff y = z$$

y reemplazando en la primera tenemos que $x = 0$. Por lo tanto $(x, y, z) = (0, y, y) = y(0, 1, 1)$
Es decir el vector director de la recta es $v_1 = (0, 1, 1)$.
Veamos una base para H_1, luego

$$(x, y, z) \in H_1 \iff x + y - z = 0 \iff x + y = z$$

reemplazando obtenemos $(x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$. Es decir $H_1 = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$, pues son l.i.
Analogamente para H_2 tenemos que

$$(x, y, z) \in H_2 \iff x - 2y + 2z = 0 \iff z = y - \frac{1}{2}x$$

es decir el vector es de la forma $(x, y, y - \frac{1}{2}) = x(1, 0, -\frac{1}{2}) + y(0, 1, 1)$ escalando el primer vector obtenemos que $H_2 = \langle (2, 0, -1), (0, 1, 1) \rangle$.
Por lo tanto definamos $v_2 = (1, 0, 1)$, dado que v_1 y v_2 son l.i. necesitamos un vector extra para tener una base, este vector puede ser cualquier que sea l.i. a v_1, v_2, en este caso tomaremos $v_3 = (1, 1, 1)$ el cual es l.i. por lo tanto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$
definamos $T(v_1) = v_1, T(v_2) = (2, 0, -1)$ y $T(v_3) = v_3$, luego T cumple las condiciones pues envia generadores de H_1 a generadores de H_2 y el plano $H_3 = \langle v_1, v_3 \rangle$ se queda igual bajo T.