Fe de erratas ayudantia 1

Autor: Jorge Bravo

Problema 4

Considere el conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ definido como

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Definamos las siguientes operaciones en este conjunto

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{2}) \oplus (c + d\sqrt{2}) &= (a + b) + (b + d)\sqrt{2}\\ (a + b\sqrt{2}) \odot (c + d\sqrt{2}) &= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}\end{aligned}$$

Demuestre que $1 + 0\sqrt{2}$ es el neutro multiplicativo y que el inverso multiplicativo de $a + b\sqrt{2}$ es $\frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$

Solucion 4

Lo primero que tenemos que hacer para resolver este ejercicio es entender cual es el conjunto en el que estamos trabajando, es decir $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Los elementos de este conjunto son símbolos que tienen 2 números racionales (a y b) donde el $\sqrt{2}$ no es un numero, si no que solamente es un **símbolo** sin significado. Ahora que sabemos eso podemos operar con las operaciones definidas arriba.

Para la primera parte nos piden demostrar que $1 + 0\sqrt{2}$ es un neutro multiplicativo para la operacion $\odot$. Para contestar a esta pregunta primero hemos de recordar que significa ser un neutro mutiplicativo. Si revisan sus apuntes/pdf de clases veran que ser un neutro multiplicativo significa que para cualquier elemento del conjunto, tenemos que al operar con el neutro este no hace nada, es decir queremos ver que

$$(1 + 0\sqrt{2}) \odot (a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$$

Veamos que esto es cierto, sea $a + b\sqrt{2}$ un elemento de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, luego al multiplicarlo con $1 + 0\sqrt{2}$ tenemos que

$$(1 + 0\sqrt{2}) \odot (a + b\sqrt{2}) = (1 \cdot a + 2 \cdot 0 \cdot b) + (1 \cdot b + 0 \cdot a)\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$$

Donde $\cdot$ es la multiplicacion usual de numeros racionales y $+$ es la suma usual de racionales. Con este demostramos que $1 + 0\sqrt{2}$ es el neutro multiplicativo para $\odot$.
Ahora para ver que $\frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$ es el inverso multiplicativo de $a + b\sqrt{2}$ necesitamos ver que al multiplicarlos entre ellos nos da el neutro multiplicativo (pues esta es la definicion de inverso multiplicativo), que por la parte anterior sabemos es $1 + 0\sqrt{2}$, es decir queremos demostrar que

$$(a + b\sqrt{2}) \odot (\frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}) = 1 + 0\sqrt{2}$$

Veamos que esto es cierto

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{2}) \odot (\frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}) &= (a \cdot \frac{a}{a^2 - 2b^2} - 2b \cdot \frac{b}{a^2 - 2b^2}) + (a \cdot -\frac{b}{a^2 - 2b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2 - 2b^2})\sqrt{2}\\ &= \frac{a^2 - 2b^2}{a^2 - 2b^2} + \frac{ab - ab}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}\\ &= 1 + 0\sqrt{2}\end{aligned}$$

Con lo que se demuestra lo pedido.