Ayudantias al papel I - MAT021

Autor: Jorge Bravo

Introducción a la serie "Ayudantias al papel"

El presente documento tiene por finalidad ser un reemplazo, aunque no perfecto, de la ayudantía de la clase MAT-021. La idea es preparar la ayudantía escribiendo este documento para después enviárselos y que quede, aunque sea una gota, de la esencia de la ayudantía.

Introducción a las matemáticas universitarias

Las matemáticas en la universidad son muchas veces un obstáculo difícil de superar para muchos alumnos de ingeniería, esto no tiene porque ser así, pero lamentablemente la educación matemática en los colegios deja mucho que desear.

Las matemáticas en un ambiente universitario deberían tratarse sobre entender el mundo que nos rodea, descubrir verdades de un mundo de las ideas, en síntesis descubrir una verdad **trascendental**.

Esto puede sonar muy bonito, y para las personas que estudian matemáticas ciertamente lo es, pero se que muchos de ustedes no estudian matemáticas si no que una ingeniería, y es por eso que también quieren saber sobre las utilidades de los conceptos que aprenderán en sus 4-5 ramos de matemáticas a lo largo de la carrera'

Usos de las matemáticas en Informática

Dado que se que muchos de los que leerán este pequeño documento serán de la carrera de Ingeniería Civil Informática nombrar algunos de los usos de las matemáticas en esta disciplina.

Lo primero que les quiero nombrar es el uso de las matemáticas en el contexto de diseño de videojuegos, pues esta a sido una de mis pasiones y conozco un poco de lo que se ocupa.

En este curso aprenderán sobre el calculo diferencial, el cual nos ayudara a hablar sobre el cambio sobre cantidades continuas, un ejemplo clásico es la velocidad de un auto, el cual podría ser nuestro personaje de un juego. De esta forma nosotros queremos saber cuanta distancia se a de mover el auto, para esto podemos plantear una ecuación diferencial y resolverla mediante métodos numéricos para obtener un movimiento que parezca natural. Todos estos conceptos los aprenderán a lo largo de sus estudios, pero que sepan que si tienen aplicación.

Otro ejemplo típico es en la programación de gráficos en 3 dimensiones, el cual podría ser un juego o un simulador por ejemplo, donde absolutamente todo reposa sobre las bases del álgebra lineal, no entrare mucho en detalles pues no es lo que nos convoca acá, pero si mencionar que las matrices y transformaciones lineales juegan un papel muy importante.

Asi hay muchos mas situaciones donde la informática y la matemática jugaran un papel fundamental, desde la famosa inteligencia artificial que se a puesto en boca de todos, hasta simulaciones de seguridad para aviones que garantizan el funcionamiento seguro de estos.

Sin mas que agregar, entremos en este mundo.

Problema 1

Una empresa de cordones para zapato nos asegura que sus cordones de $84{,}0[cm]$ tienen una tolerancia de $0{,}1[cm]$, es decir si x es el largo real del cordón entonces este tiene que medir entre $83{,}9[cm]$ y $84{,}1[cm]$.
Usando una desigualdad de valor absoluto, escriba la inecuación que x a de satisfacer.

Análisis Problema 1

Este problema es muy interesante pues es probablemente la primera vez que verán como usar el valor absoluto para estimar un error. La idea es simple, podemos pensar que dados 2 números reales, digamos a y b la distancia

entre estos es simplemente $|a-b|$, pues si suponemos que $a > b$ entonces $|a-b| = a-b$ que es justamente la cantidad de números que hay entre ellos, si se da el otro caso, es decir $b \leq a$ entonces $|a-b| = -(a-b) = b-a$ que es justamente la distancia entre a y b.
Ahora que sabemos esto podemos interpretar la siguiente inecuación

$$|x-84| \leq 0{,}1$$

Nos dice que la distancia de x a 84 puede ser de a lo mas 0,1, pero cuales son los números que estan a lo mas a 0,1 de distancia del 84?, justamente son los números que pertenecen al intervalo $[83{,}9, 84{,}1]$, que es lo mismo que decir que

$$-0{,}1 \leq x-84 \leq 0{,}1$$

Por lo tanto si alguna vez que significa el valor absoluto, solo tienen que pensar en distancias.

Problema 2

Resuelva la inecuación

$$|x-4| - |x-7| \leq 1$$

1. Analisis Problema 2

Cuando nos enfrentamos a una inecuación con valores absolutos, tenemos que encontrar los signos de la expresión de adentro de estos, para esto haremos una tabla donde pondremos los puntos donde las expresiones se hacen 0 y analizaremos los signos. Notemos que $x-4=0 \iff x=4$ y $x-7=4 \iff x=7$

	-∞	4		7	∞
x - 4	-	0	+	+	+
x - 7	-	-	-	0	+

Cuadro 1: Tabla de signos

Muy bien, entonces con esto y la definicion de valor absoluto estamos listos para resolverlo. Recordemos que el valor absoluto se define de la siguiente forma

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Tambien notemos que nuestra tabla nos divide a la recta real en 3 intervalos, estos son $(-\infty,4), [4,7), [7,\infty)$, por lo tanto nos tendremos que poner en 3 casos. Hagamos eso
Notemos que si $x \in (-\infty,4)$ ambas expresiones son negativas, por lo que tenemos que resolver la siguiente inecuacion

$$\begin{aligned} &-(x-4) - (-1)\cdot(x-7) \leq 1 \\ \iff\ & 4-x+x-7 \leq 1 \\ \iff\ & -3 \leq 1 \end{aligned}$$

Dado que llegamos a una expresión verdadera, o una tautología si se quiere, tenemos que todos los x de este caso son solución de la inecuación, dado que el caso es $x \in (-\infty,4)$ tenemos que $(-\infty,4)$ es parte de la solución de la inecuación. Veamos los otros casos.
El siguiente caso es $x \in [4,7)$, en este caso tenemos que $x-4 \geq 0$ y $x-7 < 0$, ocupando la definición de valor absoluto nuestra inecuación se convierte en

$$\begin{aligned} &x-4-(-1)\cdot(x-7) \leq 1 \\ \iff\ & x-4+x-7 \leq 1 \\ \iff\ & 2x-11 \leq 1 \\ \iff\ & 2x \leq 12 \\ \iff\ & x \leq 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que las soluciones a este caso tienen que vivir en el intervalo $(-\infty,6]$, pero también necesitamos que vivan en el caso, es decir que estén en $[4,7)$. Dado que tienen que estar en ambos a la vez necesitamos que estén en la **intersección**. Por lo tanto la solución para este caso es $x \in [4,7) \cap (-\infty,6] = [4,6]$.

Ya estamos cerca de terminar, nos falta el ultimo caso, es decir $x \in [7, \infty)$, en este caso ambas expresiones son positivas, por lo tanto la inecuacion se convierte en

$$\begin{aligned} & x - 4 - (x - 7) \leq 1 \\ \iff & -4 + 7 \leq 1 \\ \iff & 3 \leq 1 \end{aligned}$$

Dado que llegamos a una expresión que es **falsa**, tenemos que ningún elemento de $[7, \infty)$ es solución a la inecuación. Por ultimo la solución a la inecuación sera la **unión** de las soluciones a todo caso, es decir el conjunto solución es

$$S = (-\infty, 4) \cup [4, 6] \cup \emptyset = (-\infty, 6]$$

IMPORTANTE: Este tipo de ejercicios son muy comunes en controles/certámenes, a lo mejor con multiplicaciones y divisiones también, por lo que si no quedo claro escríbanme y/o hablen con su profesor de calculo.

Problema 3

Sea b un numero real mayor que 0, y a otro numero real tal que $a < b$, muestre que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$$

Analisis Problema 3

El ultimo problema que haremos sera una demostracion, nuestra idea sera partir desde la conclusion y llegar a la hipotesis, esto **NO** es algo valido de manera logica pero si en vez de usar solo implicacancias usamos $\iff$ entonces si lo sera. La idea en estos ejercicios siempre es manipular de manera algebraica la expresion de la forma mas "natural" que se les ocurra, en este caso sera multiplicando para simplificar las fracciones. Notemos que $b > 0 \implies b + 1 > 0$ por lo tanto la desigualdad **NO** se dara vuelta al multiplicar por $b(b + 1)$.
Notemos que

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1} \\ \iff & \frac{a}{b} \cdot b(b+1) < \frac{a+1}{b+1} \cdot b(b+1) \\ \iff & a(b+1) < (a+1)b \\ \iff & ab + a < ab + b \\ \iff & a < b \end{aligned}$$

Dado que todas las implicancias son en verdad doble implicancias podemos dar "vuelta" el argumento y llegamos a lo pedido.

Palabras finales

Espero les haya sido de ayuda esta pequeña guia de repaso y cualquier duda no duden en contactarme. Pasenlo bien en la semana mechona y nos vemos el proximo martes.